TD n°13: Révisions

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-3-4-5-6. Les exercices marqués d'un [1] sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Exercices de révision.

Exercice 1. Représentations conformes.
On rappelle que $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ est une équivalence conforme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$.

1. Trouver une équivalence conforme de $\{\Re(z) > 0\}$ vers $\{-\pi/2 < \Im(z) < \pi/2\}$.
2. Trouver une fonction harmonique u sur $\mathbb{D}$ qui vérifie $u(z) \to -1$ quand $z \to \zeta$ si $|\zeta| = 1$, $\Im(\zeta) < 0$ et $u(z) \to 1$ quand $z \to \zeta$ si $|\zeta| = 1$, $\Im(\zeta) > 0$.

Exercice 2. Fonctions harmoniques sur des anneaux.
Soit A l'anneau $r < |z| < R$, et u une fonction harmonique sur A. On va démontrer que u est de la forme $\Re f(z) + \alpha \log |z|$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit $g = 2\partial u$. Démontrer que g est holomorphe.
2. Démontrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$, pour laquelle on donnera une formule intégrale, telle que $g(z) - \frac{\alpha}{z}$ admette une primitive f sur A.
3. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Démontrer que $u = \Re(f) + \alpha \log |z| + C$ pour une certaine constante C.

Exercice 3. Fonctions sans points fixes.
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière telle que $f \circ f$ n'a pas de point fixe.

1. Démontrer à l'aide du théorème de Picard que $z \mapsto \frac{f(f(z))-z}{f(z)-z}$ est constante.
2. En déduire que $f'(z)$ ne s'annule pas, puis qu'il existe une constante $a \neq 0$ telle que
$$f'(f(z)) = a + \frac{1-a}{f'(z)}$$
et donc que $f'(f(z))$ n'atteint pas la valeur a.
3. Démontrer que f' est constante, puis que f est une translation.

Exercice 4. Une famille normale.
Soit $p > 0$, on note $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ vérifiant $|f|_{L^p} \leqslant 1$.

1. Soit $r < 1$ et $r < \rho < 1$. Démontrer que pour $z \in \overline{\mathbb{D}}(0, r)$, on a
$$|f(z)|^p \leqslant \frac{\rho}{2\pi(\rho - r)^p} \int_0^{2\pi} \left|f(\rho e^{i\theta})\right|^p d\theta.$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que
$$(1 - r - \varepsilon)|f(z)|^p \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{|w| \geqslant r+\varepsilon} |f(w)|^p d\lambda(w).$$
3. Déduire à l'aide du théorème de Montel que la famille $\mathcal{F}_p$ est normale.

[1] Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

Exercice 5. Obstructions et reformulations.
Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $S \subseteq U$ un ensemble fini, $V = U \setminus S$.

1. Démontrer que la suite
$$0 \to \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathbb{C}^S \to 0$$
est exacte, où on note $\mathrm{Res}(f) := (\mathrm{Res}_a(f))_{a\in S} \in \mathbb{C}^S$.

2. Démontrer que la suite
$$0 \to 2i\pi\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}(V) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}(V)^\times \xrightarrow{\mathrm{Res}\circ\mathrm{dlog}} \mathbb{Z}^S \to 0$$
est exacte, où $\mathrm{Res}(\mathrm{dlog}(f)) = (\mathrm{Res}_a(f'/f))_{a\in S} \in \mathbb{Z}^S$.

Exercice 6. Théorème de Von Dantzig.

1. Soit $a \in]0,1[$. Démontrer à l'aide du théorème des résidus que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}\frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi x)+\cos(\pi a)}dx = \frac{2\sinh(2\pi a\xi)}{\sinh(2\pi\xi)}.$$

2. En déduire que $\frac{1}{\cosh(\pi x)}$ est sa propre transformée de Fourier.

Exercice 7. Produits de Blaschke
Soit $\mathbb{D}$ le disque unité. Pour $a \in \mathbb{D}$, on définit le *facteur de Blaschke* $\varphi_a \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ par
$$\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ \forall z \in \mathbb{D}.$$

1. Démontrer que $|z| = 1 \implies |\varphi_a(z)| = 1$ et en déduire que φ_a définit une bijection holomorphe $\varphi_a \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, d'inverse φ_{-a} et qui se prolonge continument au bord.

2. Soit $\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique telle que $\varphi(0) = 0$. Pour $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ on définit la *fonction de comptage de Nevanlinna* par
$$N_\varphi(w) := \sum_{\varphi(z)=w} \log\left|\frac{1}{z}\right|.$$
   (a) Soient $a_1, ..., a_n$ tels que $\varphi(a_j) = w$ pour tout j, et $B_n(z) = \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(z)$. Démontrer que $\varphi_w \circ \varphi$ s'écrit $B_n g$, avec $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$.
   (b) Démontrer que $|g(0)| \leqslant 1$ à l'aide du principe du maximum.
   (c) En déduire l'inégalité de Littlewood :
$$N_\varphi(w) \leqslant \log|1/w|.$$

3. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique bornée et non identiquement nulle. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité. Montrer
$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|a_n|) < \infty.$$

4. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ telle que $\sum_{n\geqslant 1}(1-|a_n|) < \infty$. Montrer que le produit infini
$$\prod_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{a_n}\varphi_{a_n}$$
converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction analytique B qui est bornée en norme par 1. La fonction B est appelée le *produit de Blaschke* associé à la suite $(a_n)_n$.
Indication : on pourra commencer par prouver que le produit est de la forme $\prod(1+g_n)$ *où* $\sum g_n$ *converge uniformément sur tout compact.*

5. Soit $K \subset \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ un fermé. À l'aide des produits de Blaschke, construire une série entière de rayon de convergence 1 dont la somme se prolonge en une fonction analytique au voisinage de tout $z \in \mathbb{T} \setminus K$.